תרגיל 2, מבוא לפונקציות מרוכבות

1. מצא את החלק הממשי והמדומה של הפונקציות הבאות ובדוק אם הן מקיימות את תנאי קושי-רימן:

(א) $f(z)=\frac{iz+2}{2i-z}$ (ב) $f(z)=\frac{1}{\operatorname{Im}(z)+i}$

2. מצא פונקציה אנליטית $f(z)$ המקיימת $\operatorname{Im} f(z)=\frac{y}{x^2+y^2}$ בהנתן כי $f(2)=0$.

3. בדוק האם הפונקציות הבאות מקיימות את תנאי קושי-רימן:

(א) $f(z)=x^2-y^2-2ixy$ (ב) $f(z)=\log(x^2+y^2)+2iarc\cot\left(\frac{x}{y}\right)$

4. תהא $f(z)$ פונקציה אנליטית כך שגם $f'(z)$ אנליטית. נציג $f(z)=u+iv$.

הוכח כי מתקיים $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ ו- $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$.

5. (א) הוכח כי אם $f(z)$ אנליטית וגם $\overline{f(z)}$ אנליטית אזי $f(z)$ קבועה.

(ב) הוכח כי $f(z)$ אנליטית בתחום סימטרי D אם ורק אם $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ אנליטית באותו תחום.

6. (א) נניח כי $p(z)=(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_k)$ כאשר $z_1,z_2,...,z_k\in C$. הוכח כי לכל $z\in C\setminus\{z_1,z_2,...,z_k\}$

$$\frac{p'(z)}{p(z)}=\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+...+\frac{1}{z-z_k}$$

(ב) נניח בנוסף כי $\operatorname{Re}(z_j)<0$ לכל $j=1,...,k$, וכי $\operatorname{Re}(z)\geq 0$. הוכח כי $\operatorname{Re}(z-z_j)>0$ לכל $j=1,...,k$ והסק מכך כי $p'(z)\neq 0$.

7. הוכח כי כל פונקציה אנליטית שכל ערכיה ממשיים הינה קבועה.